Théorème de Bayes

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Soit A un événement de l'univers U et soient $B_1 \dots B_n$ des événements incompatibles deux à deux dont la réunion donne U et tels que $B_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, \dots, n$

Alors on a :

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + \dots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n)}$$

Démonstration

Partons de la définition des probabilités conditionnelles qui dit que :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si on l'adapte à notre énoncé ($B = B_i$), on a :

$$P(A \mid B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \rightarrow P(A \cap B_i) = P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

On peut aussi écrire :

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$$

On sait que $P(A \cap B_i) = P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$. On peut alors le remplacer dans la formule ci-dessus et on a :

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

Arrivés à cette étape, nous remarquons que le numérateur correspond au numérateur de la formule de Bayes. Il faut maintenant que nous nous occuppions du dénominateur.

On peut écrire A comme :

$$A = A \cap U$$

On sait que tous les B_i sont incompatibles ($B_i \cap B_j = \emptyset$). L'union des B_i donne U. Notre formule de vient donc :

$$A = A \cap U = A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$$

Par distributivité on a le droit d'écrire :

$$A = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

Prenons la probabilité :

$$P(A) = P\left[(A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)\right]$$

Selon l'axiome (3), on a :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n)$$

Maintenant on sait que les événements $(A \cap B_i)$ sont indépendants (disjoints). Quand deux événements A et B sont indépendants, on peut écrire que $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$. Notre équation précédente se transforme donc en :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n)$$

On reprend notre formule

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

dans laquelle on remplace $P(A)$ par ce qu'on vient de trouver et on a :

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n)}$$

$\diamondsuit$