# Volume de révolution

Gregory Loichot

18 juin 2013

## Enoncé

L'intégration permet de déterminer l'aire de certaines surfaces. Elle permet également de déterminer le volume de certains corps. Par exemple, le volume d'un corps engendré par la rotation de la représentation graphique d'une fonction continue sur un intervalle autour de l'axe des $x$. Comment calculer ce volume ?

## Démonstration

Partageons l'intervalle $[a; b]$ en $N$ intervalles $[x_{i-1}; x_i]$ de même largeur $\Delta x$ dans le but de découper le solide en $N$ tranches.

Nommons $V_i$ le volume de la $i$ème tranche. Soit $f(x_{i_{min}})$ le minimum et $f(x_{i_{max}})$ le maximum de $f$ sur $[x_{i-1}; x_i]$.

Le volume d'une tranche est compris entre le volume d'un cylindre de rayon $f(x_{i_{min}})$ et d'épaisseur $\Delta x$ et celui d'un cylindre de rayon $f(x_{i_{max}})$ et d'épaisseur $\Delta x$.

$$\pi \cdot (f(x_{i_{min}}))^2 \cdot \Delta x \leq V_i \leq \pi \cdot (f(x_{i_{max}}))^2 \cdot \Delta x$$

Ici nous avons le volume d'*une* tranche. Or il y en a $N$ dans tout le corps. Il faut donc additionner le volume de toutes les tranches :

$$\sum_{i=1}^{N} \pi \cdot (f(x_{i_{min}}))^2 \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^{N} V_i \leq \sum_{i=1}^{N} \pi \cdot (f(x_{i_{max}}))^2 \cdot \Delta x$$

Le terme de gauche est une somme minorante, le terme de droite est une somme majorante de la fonction $\pi \cdot f^2$. Comme $f$ est continue, $\pi \cdot f^2$ l'est aussi et est donc intégrable.

Si on fait tendre $N$ vers l'infini, alors les sommes majorantes et minorantes convergent vers $\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$.

Finalement :

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

♢

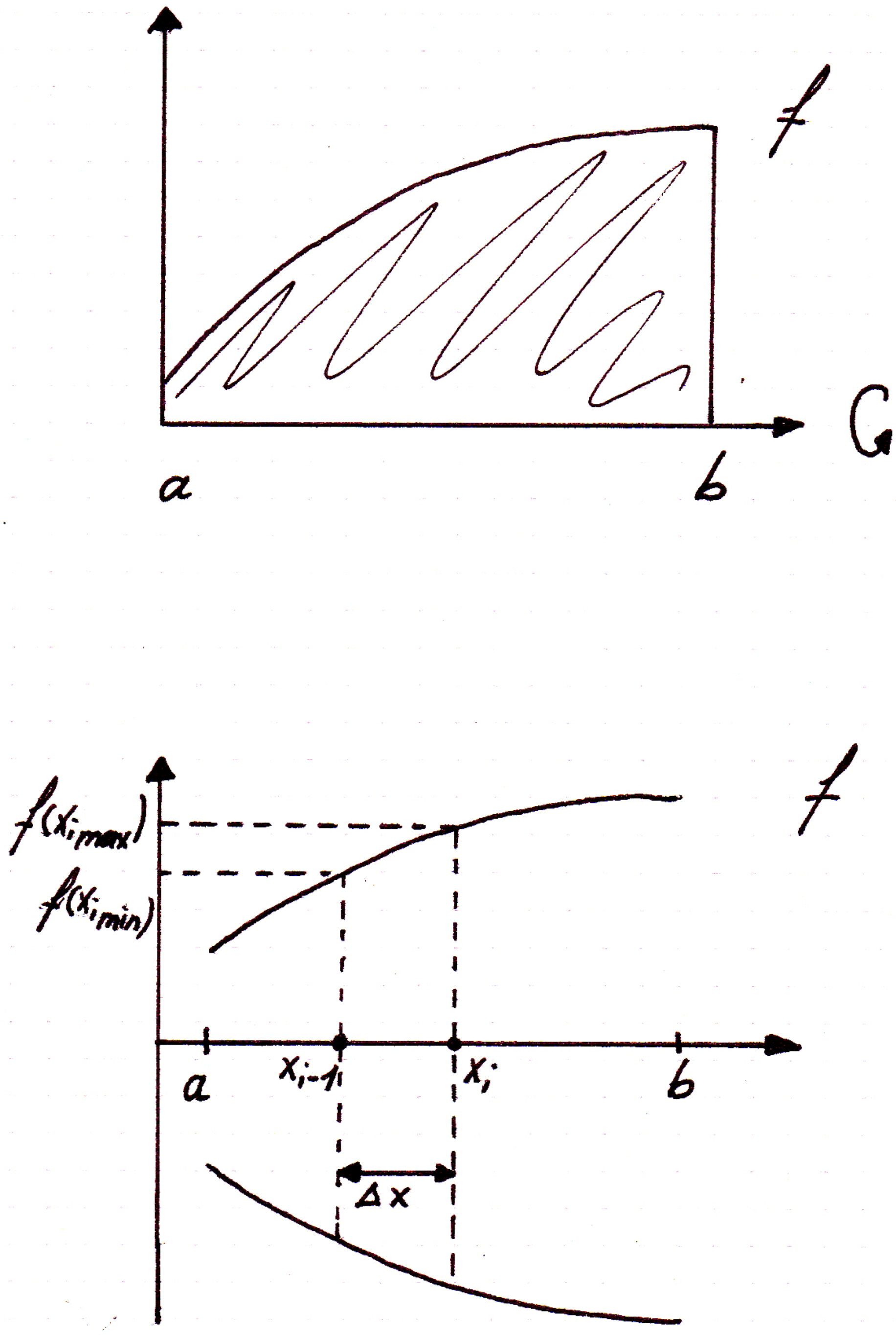


FIGURE 1 – En haut — la fonction $f$ donnera naissance à un "bol". En bas — Le volume d'une tranche est compris entre le volume du cylindre ayant $f(x_{i_{min}})$ comme rayon et le volume du cylindre ayant $f(x_{i_{max}})$ comme rayon.