Application tangente affine

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Considérons une fonction réelle f dérivable en a. Cherchons l'équation de la tangente à f en $(a; f(a))$.

Démonstration

Nommons la tangente à $f(a)$ par $T_a(x)$. Une droite est une fonction de x qui peut s'écrire $d(x)$ p.ex. Or ici on rajoute une précision pour dire que cette droite passe par un point précis ($(a; f(a))$ que l'on abrège a) : $d_a(x)$. On utilise la lettre T pour Tangente.

Une tangente est une droite et donc son équation est de la forme : $m \cdot x + n$ où m est la pente et n l'ordonnée à l'origine (normalement on note l'équation d'une droite par $ax + b$, mais ici pour ne pas mélanger on utilise une autre notation).

$$T_a(x) = m \cdot x + n$$

Tout d'abord il faut se rappeller qu'une tangente à f au point $(a; f(a))$ possède une pente égale à la dérivée de f au point a. *On dit que : la dérivée c'est la pente de la tangente.* Donc comme f est dérivale en a on peut connaître $f'(a)$ et donc la pente de la tangente.

Dans notre définition de T_a, m représente la pente. Or nous venons de voir que la pente est égale à $f'(a)$:

$$T_a(x) = f'(a) \cdot x + n$$

Comme nous l'avons dit plus haut, $T_a(x)$ *passe* par le point $(a; f(a))$. Donc $T_a(a) = f(a)$:

$$f'(a) \cdot a + n = f(a)$$

On peut alors isoler n :

$$n = f(a) - f'(a) \cdot a$$

On remplace n dans l'équation de $T_a(x)$ et on a :

$$T_a(x) = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$$

On met $f'(a)$ en évidence et on a :

$$T_a(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

L'application T_a s'appelle l'application tangente affine de f au point $(a; f(a))$, On peut aussi remarqué qu'au voisinage de a la tangente est *presque* égale à f (mais il ne faut pas trop s'éloigner de a). On dit alors que T_a est une approximation de f au voisinage de a.

♢

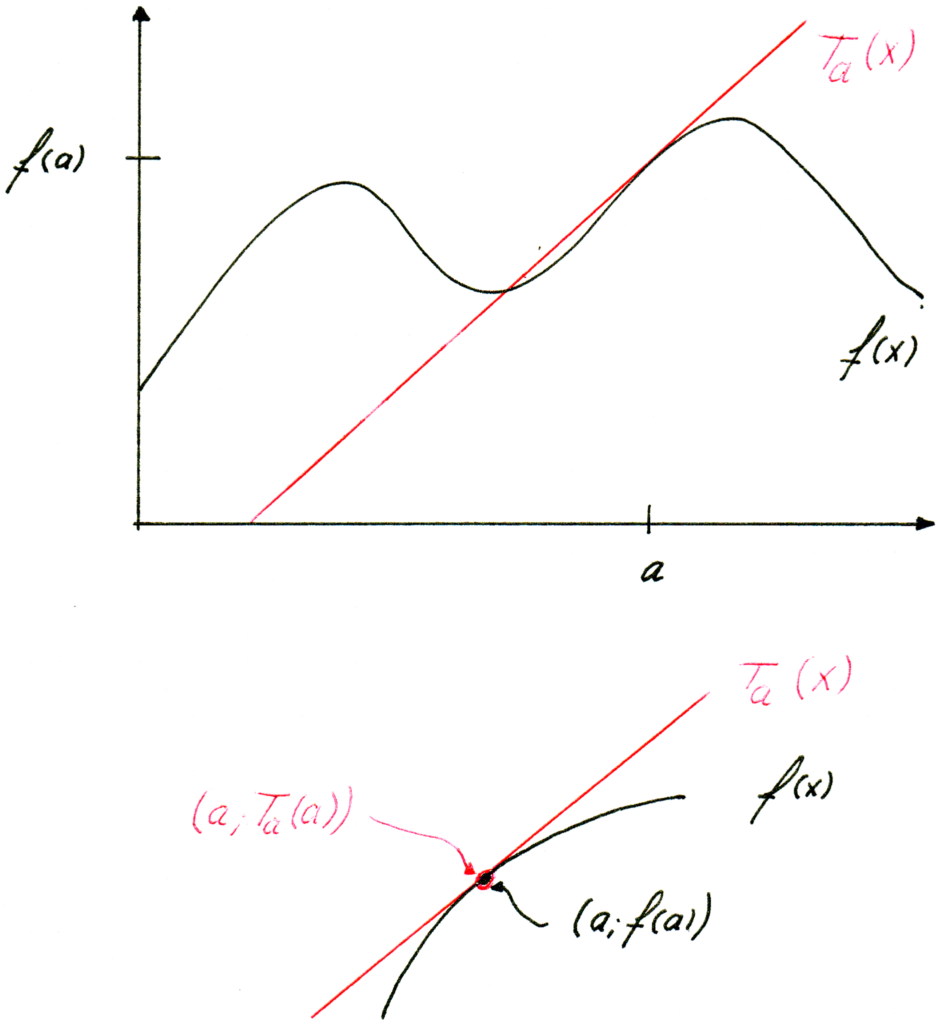

FIGURE 1 – Situation à considérer.