Théorème fondamental du calcul intégral

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Ce théorème permet de déterminer l'intégrale définie d'une fonction f à l'aide d'une autre fonction F qui satisfait :

$$F' = f$$

On dit alors que F est la *primitive* de f sur un intervalle $[a; b]$.

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$.

1. Si A est la fonction définie par $A(X) = \int_a^X f(t)\,dt$, $\forall X \in [a; b]$, alors A est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a.
2. Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Démonstration

Partie I

Soit la fonction

$$A(X) = \int_a^X f(t)\,dt$$

On sait que $X > a$ sinon l'intégrale n'aurait pas de sens. Ainsi $A(X)$ représente l'aire sous la courbe f entre $t = a$ et $t = X$. L'énoncé affirme alors que A est une primitive de f. Démontrons donc que :

$$A' = f$$

Partons de la définition de la dérivée :

$$A'(X) = \lim_{h \to 0} \frac{A(X + h) - A(X)}{h}$$

Le théorème de la moyenne affirme qu'il existe un nombre $c \in [X; X+h]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{(X+h)-X} \cdot \int_X^{X+h} f(x)\,dx$$

Or $\int_X^{X+h} f(x)\,dx$ vaut l'aire sous la courbe entre $X+h$ et X. Cette aire peut s'écrire comme :

$$\int_a^{X+h} f(x)\,dx - \int_a^X f(x)\,dx$$

qui, selon notre définition de $A(X)$ s'écrit comme :

$$A(X+h) - A(X)$$

On remplace donc $\int_X^{X+h} f(x)$ par $A(X+h)-A(X)$ et la formule du théorème de la moyenne devient :

$$f(c) = \frac{1}{(X+h)-X} \cdot \int_X^{X+h} f(x)\,dx = \frac{1}{(X+h)-X} \cdot (A(X+h) - A(X))$$

$$\to f(c) = \frac{A(X+h) - A(X)}{h}$$

Faisons tendre h vers 0 dans l'équation ci-dessus (pour faire apparaitre la dérivée de A(X)) :

$$\lim_{h \to 0} f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{A(X+h) - A(X)}{h}$$

On a alors que c tend vers X (c se trouve entre X et $X+h$ donc si h tend vers 0 alors $X+h$ tend vers X. c est alors entre X et X) et que, par *continuité* de f, $f(c)$ tend vers $f(X)$ (car c tend vers X) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(X+h) - A(X)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = \lim_{c \to X} f(c) = f(X)$$

On vient donc de démontrer que :

$$A'(X) = f(X)$$

La dérivée de la fonction A est la fonction f. Ainsi A est une primitive de f sur $[a; b]$. $A(a) = 0$ car :

$$A(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

$\diamondsuit$

Partie II

Soit F une primitive de f. Vérifions tout d'abord que f diffère d'au plus une constante avec A (qui est *aussi* une primitive de f).

Posons (on aimerait que $G(X)$ soit une constante...)

$$G(X) = F(X) - A(X)$$

avec $X \in [a; b]$. Dérivons $G(X)$:

$$G'(X) = F'(X) - A'(X) = f(X) - f(X) = 0$$

Si on utilise le théorème de la fonction constante (voir théorème sur l'ensemble de primitives), on voit que $G(X)$ satisfait les trois conditions du théorème. On peut donc en conclure que $G(X) = C$, où C est une constante.

On a donc montré que la différence entre $F(X)$ et $A(X)$ est une constante. Donc si $A(X)$ est une primitive de f, alors toutes les autres primitives F peuvent s'écrire comme $F(X) = A(X) + C$.

Il nous reste à démontrer que

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Reprenons la formule $F(X) = A(X) + C$ (en isolant $A(X)$ elle devient : $A(X) = F(X) - C$) et réécrivons-la en remplaçant $A(X)$ par $\int_a^X f(t)\,dt$ (selon la partie I). On a donc :

$$\int_a^X f(t)\,dt = F(X) - C$$

Si $X = a$, on a :

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - C = 0 \rightarrow C = F(a)$$

Remplaçons C par $F(a)$ dans le résultat précédent :

$$\int_a^X f(t)\,dt = F(X) - F(a)$$

Si on remplace X par b, on a le résultat :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

$\diamondsuit$