

Loi Binomiale

Gregory Loichot

18 juin 2013

Énoncé

1. Expliquez la formule : si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, alors on a :

$$\mathcal{B}(X = k) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

en vous basant sur un exemple avec $p = \frac{1}{4}$ et $n = 5$.

2. Donnez le tableau des probabilités de la loi suivie par la variable aléatoire discrète X .
3. Calculez le nombre d'essais pour que la probabilité d'avoir au moins un succès dépasse 90%.

Démonstration

Point 1

Tout d'abord, il faut se rappeler que la loi binomiale s'applique à une variable aléatoire discrète et dans les conditions suivantes :

- On répète plusieurs fois une expérience qui n'a que *deux* issues possibles : Succès et Echec.
- La probabilité de succès est la même à chaque expérience.
- La variable aléatoire représente le nombre de succès.

Exemple

Soit une urne contenant 4 boules : 1 noire et 3 blanches. Appellons « succès » le fait de tirer une boule noire. Il est clair que :

$$P(\text{succès lors de l'expérience}) = \frac{1}{4}$$

(on a une chance sur 4 de tirer une boule noire).

Supposons que l'on répète cinq fois ($n = 5$) l'expérience (le fait de tirer une boule) en remplaçant la boule tirée dans l'urne. Le nombre de succès (le nombre de fois qu'on aura tiré une boule noire) va alors varier entre 0 et 5 : au pire on ne tirera jamais de boule noire et au mieux on la tire à chaque fois, c'est-à-dire 5 fois).

Maintenant on souhaite calculer la probabilité de tirer k fois la boule noire. Autrement dit on veut calculer

$$P(X = k), \quad k = 0, \dots, 5$$

Par exemple si $k = 3$, on peut obtenir trois boules noires avec le tirage suivant : N-N-N-B-B. La probabilité d'avoir cette séquence est de (rappelons que la probabilité de succès (tirer une noire) vaut $\frac{1}{4}$ et la probabilité d'échec (tirer une blanche) vaut $\frac{3}{4}$) :

$$P(\text{N-N-N-B-B}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Mais ce n'est pas la seule possibilité d'obtenir trois boules noires. Il y a aussi B-N-N-N-B, B-B-N-N-N, ... bref 3 boules noires parmi 5 places. Combien de séquences possibles existent avec 3 boules noires et 2 boules blanches ? C'est le nombre de permutations avec répétitions $\bar{P}(3; 2)$

$$\bar{P}(3; 2) = \frac{(3+2)!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = C_3^5$$

Ainsi

$$P(X = 3) = C_3^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

En généralisant (jusqu'à présent on a fait les calculs pour $n = 5$ et $k = 3$), on a :

$$P(X = k) = C_k^n \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^k}^{p^k} \cdot \overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}}^{(1-p)^{n-k}}$$

Cette équation représente bien une loi binomiale.

Point 2

Le tableau des probabilités de la variable X vaut, pour notre exemple :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0.24	0.40	0.26	0.09	0.01	0.001

Point 3

On souhaite ici que $P(X = 1) \geq 90\%$. La probabilité d'obtenir une noire vaut $\frac{1}{4}$. Or on sait que :

$$P(\text{au moins 1 noire}) = 1 - P(\text{aucune noire})$$

On souhaite donc calculer $1 - P(X = 0) > 0.9$. Il faut connaître $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = C_0^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n &> 0.9 \\ 0.1 &> \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \log(0.1) &> n \cdot \log\left(\frac{3}{4}\right) \\ n &> \frac{\log(0.1)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} = 8.004 \end{aligned}$$

Il faut donc effectuer au moins 9 tirages !