Variable aléatoire discrètes

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Soit U un univers muni d'une loi de probabilité. Sur la base d'un exemple de votre choix :

1. Définissez une variable aléatoire disctète $X : U \to \mathbb{R}$ et donnez son tableau des probabilités.
2. Expliquez la notion de variable aléatoire.
3. Définissez l'espérence mathématique $E(x)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ en précisant leur signification.
4. Quelle est la différence entre une variable aléatoire discrète et une variable aléatoire continue ?

Démonstration

Point 1

Définition Un univers U est l'ensemble de toutes les issues possibles, incompatibles deux à deux, que se présentent au cours d'une épreuve aléatoire.

Exemple

Soient deux dés dont on relève les valeurs après les avoir lancés. L'univers U vaut alors :

$$U = \{(1;1), (1;2), \dots, (1;6), (2;1), \dots, (6;6)\}$$

Définissions une fonction $X : U \to \mathbb{R}$ telle que :

$$X(r, v) = r + v$$

où r et v représentent chacun la valeur d'un dé après un lancé. On a *choisi* de définir la fonction X comme représentant la somme de la valeur des deux dés. Par exemple, si après avoir lancé les deux dés on obtient 3 et 5, alors $X(3;5) = 8$. La fonction X peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 2 et 12 (toutes les sommes de deux nombres entiers compris entre 1 et 6).

A ce stade, on remarque que la fonction X associe un nombre réels (la somme des deux dés) à une issue d'une épreuve aléatoire. On va donc dire que X est une variable aléatoire discrète (elle ne prend qu'un nombre fini de valeur).

On va maintenant compter le nombre de possibilités qu'il y a d'arriver à une somme égale à 2, 3, ...12

Somme des 2 dés	Cas favorables	Nombre de cas favorables
2	(1 ;1)	1
3	(1 ;2), (2 ;1)	2
4	(1 ;3), (3 ;1), (2 ;2)	3
5	...	4
6	...	5
7	...	6
8	...	5
9	...	4
10	...	3
11	...	2
12	(6 ;6)	1
	total	36

La colonne "Somme des deux dés" contient toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire discrète X. On va renommer cette colonne par x_i.

Quelle est la probabilité que la somme des deux dés soit égale à 3 ? Autrement dit, quelle est la probabilité pour que la variable aléatoire discrète X soit égale à 3 ? Cela peut encore se résumer à calculer $P(X = 3)$. Il y a 2 cas favorables parmi 36 donc :

$$P(X = 3) = \frac{2}{36}$$

Si on répète le calcul pour tous les x_i, on arrive au tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ce tableau s'appelle "loi de probabilité" ou encore "distribution" de la variable aléatoire discrète X. On peut maintenant définir la notion de variable aléatoire.

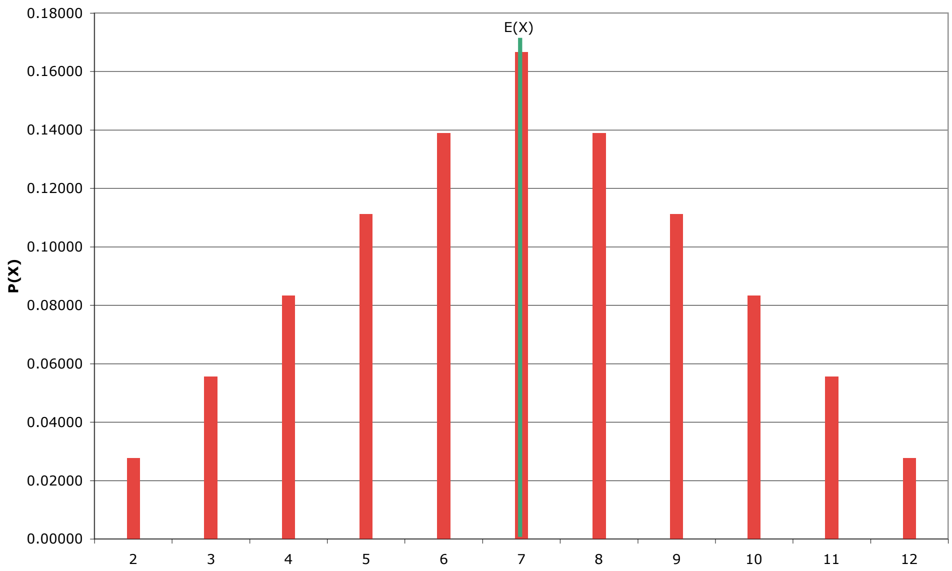

FIGURE 1 – Ce graphique montre qu'il y a réellement plus de chance que la variable aléatoire prenne la valeur 7. La moyenne est aussi égale à 7 ...

Il est aussi possible de calculer la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur comprise entre deux bornes. Par exemple $P(6 < X \leq 10)$. Pour se faire on utilise la formule suivante :

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Point 2

Définition de la variable aléatoire Il est souvent possible d'associer un nombre réel au résultat d'une expérience aléatoire et créer ainsi une *fonction* des observation appelée variable aléatoire.

Définition de la variable aléatoire discrète C'est une variable qui peut prendre une infinité *dénombrable* de valeurs. Par exemple : le nombre d'enfant dans une famille, le résultat de la loterie, ...

Soit U un univers muni d'une loi de probabilité (c'est-à-dire que chaque issus a une certaine probabilité de se produire). On appelle variable aléatoire discrète toutes fonctions réelles X définies sur U telles que $X : U \to \mathbb{R}$. Ainsi pour à $x \in \Re$ on peut associé la probabilité que la variable aléatoire discrète prenne la valeur x.

Point 3

Espérence mathématique

L'espérence mathématique $E(X)$ vaut :

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$E(X)$ représente la moyenne de la distribution de probabilité de X. Dans le cas de notre jeu de dé, elle vaut :

$$E(X) = 7$$

La moyenne de la somme des deux dés après un très grand nombre de lancés vaut 7.

Variance

La variance $V(X)$ se défini comme :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot (x_i - E(X))^2$$

C'est une mesure de la dispertion : on calcule l'écart au carré entre les valeurs de la distribution et la valeur moyenne $E(X)$. Les unités de la variance sont les mêmes que celles de la moyenne mais au carré.

Dans notre exemple, la variance est égale à 5.83.

Ecart-type

L'écart-type $\sigma(X)$ se défini comme :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Comme nous l'avons vu, la variance a des unités au carré. Il est donc impossible de comparer une valeur x_i avec la valeur de V(X). En revanche, comme l'écart-type est la racine de la variance, les unités sont les mêmes que celles des x_i.

En mathématiques, l'écart type est une quantité réelle positive, éventuellement infinie, utilisée dans le domaine des probabilités pour caractériser la répartition d'une variable aléatoire autour de sa moyenne. En particulier, la moyenne et l'écart type caractérisent entièrement les lois gaussiennes à un paramètre réel, de sorte qu'ils sont utilisés pour les paramétrer. Plus généralement, l'écart type, à travers son carré appelé variance , permet de caractériser des lois gaussiennes en dimension supérieure. Ces considérations ne sont pas sans importance, notamment dans l'application du théorème central limite.

Dans notre exemple, l'écart-type est égal à 2.42.

Point 4

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, X peut prendre une infinité de valeurs dénombrables (somme de deux dés : 12 valeurs possibles, nombre de personnes dans une ville : tous les *entiers* entre 0 et 7 miliards, ...).

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, X peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs dans un intervalle donné (taille d'un homme : un homme peut mesurer 181.01 cm, 181.0000001 cm, 181.0000000000000001, ...). On ne peut pas calculer la probabilité qu'un homme mesure une taille donnée (cette probabilité est nulle !), mais on peut calculer la probabilité qu'un homme ait une taille comprise entre 180 et 185 cm par exemple. On calcule alors $P(a < X \leq b)$ et non plus $P(X = x_i)$.