Théorème des accroissements finis (Lagrange)
Corollaire 2

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Soient deux fonctions $f : \Re \to \Re$ et $g : \Re \to \Re$. Si

1. f et g sont continues sur $[a; b]$,
2. f et g sont dérivables sur $]a; b[$,
3. $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a; b[$.

Alors, il existe un nombre C tel que $f(x) = g(x) + C$ $\forall x \in]a; b[$.

Démonstration

Utilisons le corollaire 1 (théorème de la fonction constante) sur la fonction $f - g$. On utilise la fonction $f - g$, car si $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a; b[$, alors cela veut dire que les deux fonctions ont toujours la même pente (p.ex. deux droites parallèles). L'écart entre les deux fonctions sera donc toujours le même. Cet écart vaut une constante, d'où l'interêt de montrer que $f - g$ est une constante.

Les deux premiers points du corolaire 1 sont satisfaits (selon l'énoncé). Pour le troisième point (selon l'énoncé) :

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Donc la fonction $f - g$ satisfait le corollaire 1, et cette fonction est donc constante. Cela s'écrit comme :

$$f(x) - g(x) = C$$

$$\to f(x) = g(x) - C$$