Théorème des accroissements finis (Lagrange)

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Soit une fonction $f : \Re \to \Re$. Si
– f est continue sur $[a; b]$,
– f est dérivable sur $]a; b[$,
Alors, il existe un nombre $c \in]a; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Rappel

On sait que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite (en fait $S_{a;b}(x)$ qui passe par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.

Le théorème signifie donc qu'il existe *au moins* un point $c \in]a; b[$ tel que la tangente en ce point c soit parallèle à la séquente $S_{a;b}(x)$. Ce qui revient encore à dire que la pente de la tangente au point c est la même que celle de $S_{a;b}(x)$.

Démonstration

Soit la fonction $g(x) = f(x) - S_{a;b}(x)$. L'idée est de montrer que cette fonction satisfait le théorème de Rolle. Vérifions donc que c'est le cas :

1. g est continue sur $[a; b]$ car, selon l'énoncé, f est continue sur $[a : b]$ et $S_{a;b}$ l'est aussi car elle est définie à partir de la fonction f (dans l'équation de $S_{a;b}(x)$ il n'y a que des f).
2. g est dérivable sur $]a; b[$ car, selon l'énoncé, f est dérivable sur $]a : b[$ et $S_{a;b}$ l'est aussi car elle est définie à partir de la fonction f (dans l'équation de $S_{a;b}(x)$ il n'y a que des f).

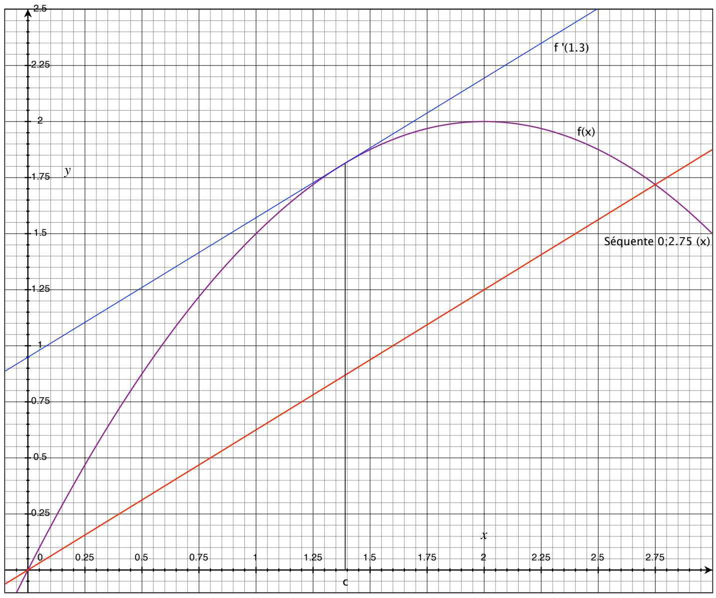

FIGURE 1 – Soit la fonction f en violet. La séquente $S_{0;2.75}(x)$ a une pente de 0.625. La tangente à la fonction f au point $c = 1.33$ a aussi une pente de 0.625.

3. Est-ce que $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$? Oui, car $g(a) = f(a) - S_{a;b}(a)$ et $g(b) = f(b) - S_{a;b}(b)$. Rappelons-nous que

$$S_{a;b}(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Donc

$$S_{a;b}(a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a)$$

$$S_{a;b}(b) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}} \cdot \cancel{(b - a)} = f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$$

et donc que $S_{a;b}(a) = f(a)$ et $S_{a;b}(b) = f(b)$. Finalement on a bien que $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(b) = 0$.

La raison pour laquelle nous avons défini $g(x) = f(x) - S_{a;b}(x)$ est principalement de satisfaire le point 3 du théorème de Rolle.

Le théorème de Rolle nous dit, si les trois conditions sont remplies (c'est le cas), qu'il existe un nombre $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Que vaut $g'(x)$? Il suffit simplement de dériver notre définition de $g(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - S'_{a;b}(x)$$

Il nous faut calculer $S'_{a;b}(x)$:

$$S'_{a;b}(x) = \left(\overbrace{f(a)}^{cte} + \overbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}^{cte} \cdot (x-a) \right)'$$

$$S'_{a;b}(x) = \overbrace{f'(a)}^{0} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)' = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Donc on a que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si $x = c$, on a

$$g'(c) \overbrace{= 0}^{Rolle} = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\rightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$