Analyse combinatoire

Gregory Loichot

18 juin 2013

Factorielle

C'est une notion qu'il faut avoir pour la suite. La factorielle d'un nombre n s'écrit $n!$ et vaut :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Arrangements sans répétition

Définition

On dispose de n objets distincts. Un arrangement sans répétition des ces n objets pris k à la fois est une manière de choisir k objets parmi n. L'ordre compte.

$$A_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Cette formule s'explique par le fait qu'on peut choisir le premier objet parmi n. Ensuite on peut choisir le deuxième objet parmi les $n-1$ objets restants, ainsi de suite jusqu'au $k$ième objet que l'on peut choisir parmi les $n-k+1$ objets restants.

Exemple

De combien de manières différentes peut-on élire un président et un vice-président parmi 10 personnes ?

Ici l'ordre compte car on choisi d'abord un vice-président puis un président (ou l'inverse) et on garde cet ordre pour tous les arrangements possibles.

Nous avons donc le choix parmi 10 personnes pour le vice-président puis, une fois le vice-président élu, nous avons le choix parmi 9 personnes pour élire un président. Il y a donc $10 \cdot 9$ manières différentes de les élire. Cela peut se noter aussi :

$$A_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!} = 90$$

Arrangements avec répétitions

Définition

On dispose de n objets distincts. Un arrangement avec répétitions des ces n objets pris k à la fois est une manière de choisir k objets parmi n, le même objet pouvant être pris plusieurs fois (d'où les répétitions). L'ordre compte.

$$\overline{A_k^n} = n^k$$

Cette formule s'explique par le fait qu'on peut choisir le premier objet parmi n. Ensuite on peut choisir le deuxième objet parmi les n objets restants (le premier ayant été remis pour pouvoir être éventuellement choisi plusieurs fois), ainsi de suite jusqu'au $k$ième objet que l'on peut encore choisir parmi n objets restants.

Exemple

Combien de mots peut-on écrire avec 3 lettres parmi les lettres qui composent le mot CHIEN ?

On peut utiliser plusieurs fois la même lettre et l'ordre compte, c'est donc bien des arrangements avec répétitions. Pour la première lettre, on peut choisir parmi 5 lettres (CHIEN), pour la deuxième lettre on peut choisir parmi 5 lettres (CHIEN) et finalement pour la troisième lettre, on peut choisir parmi 5 lettres (CHIEN).

Finalement on a $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ mots possibles. Cela peut encore s'écrire comme :

$$\overline{A_3^5} = 5^3 = 125$$

Permutations sans répétition

Définition

On dispose de n objets distincts. Une permutation de n objets est un arrangement sans répétition de *tous* ces n objets.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Pour le premier choix, on a le choix parmi n objets. Pour le second choix il ne reste plus que $n-1$ objets à disposition, ... pour le $n$ième objet il ne reste plus qu'un seul choix. Finalement on a $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Exemple

Combien de mots peut-on écrire avec *toutes* les lettres qui composent le mot CHIEN ?

On a 5 lettres pour le premier choix, 4 pour le second choix, ... une lettre pour le cinquième choix. Il y a donc $5! = 120$ mots possibles.

$$P_5 = 5! = 120$$

Remarque

On sait que

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Or, si $0!$ était égale à 0, la fraction ne serait pas définie (division par 0). Pour contourner le problème, on admet la convention $0! = 1$. Ainsi A_n^n est défini et P_n aussi.

Permutations avec répétitions

Définition

On dispose de n objets. Parmi ces n objets, il y en a p sortes différentes. On suppose qu'il y a : n_1 objets de la première sorte, n_2 objets de la seconde sorte, ... n_p objets de la $p$ième sorte. $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$.

Une permutation avec répétitions de ces n objets est une permutation de ces n objets dans laquelle on ne distingue pas les objets de même sorte.

$$\overline{P}\left(n_1, \ldots, n_p\right) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_p!}$$

Il y a $n!$ permutations possibles de ces n objets parmi lesquelles il y a $n_1!$ permutations possibles des objets de la première sorte entre eux ... $n_p!$ permutations des objets de la $p$ième sorte entre eux. Or on ne veut pas distinguer ces permutations. Il faut donc diviser $n!$ par $n_1! \cdot \ldots \cdot n_p!$.

Exemple

Combien de mots peut-on écrire avec les lettres qui composent le mot LILLE ?

Il y a $5! = 120$ mots possibles si on distingue les L. Pour chacun de ces mots possibles, il y a $3! = 6$ permutations possibles des L.

Donc si on ne distingue pas les lettres L, il y a $\frac{5!}{3!} = 20$ mots possibles

$$\overline{P}\left(3, 1, 1\right) = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 20$$

Combinaisons sans répétition

Définition

On dispose de n objets distincts. Une combinaison sans répétition de n objets pris k à la fois, est un choix de k objets parmi n. L'ordre ne compte pas.

$$C_k^n = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Supposons qu'on possède cinq objets différents (ABCDE). Supposons aussi qu'on les prenne trois à trois. Il y a donc $A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ arrangements possibles.

Or ici on ne tient pas compte de l'ordre (ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA) ! Il faut donc éliminer toutes les permutations qui sont au nombre de $3! = 6$ par arrangement, d'où la division par $k!$ dans la formule.

Exemple

Combien d'ensembles (on ne peut pas parler de mots car l'ordre ne compte pas ici) de 3 lettres différentes peut-on former avec les lettres du mot CHIEN ?

Si on tient compte de l'ordre, il y a $A_3^5 = \frac{n!}{2!} = 60$ façons de tirer 3 lettres parmi 5. Mais on ne veut pas tenir compte de l'ordre, il faut donc éliminer les permutations de chacun des arrangements qui sont au nombre de 3!.

Il y a finalement

$$C_3^5 = \frac{60}{3!} = 10$$

ensembles possibles.

La loterie est une combinaison ! Soit une grille de 45 chiffres parmi lesquels il faut en cocher 6, il y a alors

$$C_6^{45} = \frac{45!}{39! \cdot 6!} = 8145060$$

On a donc un peu moins d'une chance sur 8 millions de gagner ...