Ensemble de primitives

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors

1. Pour tous réels C, la fonction $G : x \to F(x)+C$ est aussi une primitive de f sur $[a;b]$.
2. Toute primitive de f sur $[a;b]$ est de ce type.

Démonstration

Pour démontrer le point 1, il suffit de prouver que G est une primitive de f. Autrement dit, il faut que la dériviée de G soit égale à f.

$$G'(x) \overset{\text{énoncé}}{=} (F(x)+C)' = F'(x) + C' \overset{\text{énoncé}}{=} F'(x) = f(x)$$

En ce qui concerne le deuxième point, il faut utiliser le théorème de la fonction constante. Ce théoréme s'énonce comme suit :

Si $f : \Re \to \Re$ est telle que :

1. f est continue sur $[a;b]$.
2. f est dérivable sur $]a;b[$.
3. $f'(x) = 0$ pour tous $x \in [a;b]$

Alors f est constante sur $[a;b]$.

Supposons maintenant que H soit une primitive (une autre que F) de f. Si on construit la fonction $H - F$, alors cette nouvelle fonction satisfait les conditions du théorème de la fonction constante. Voyons comment :

$H - F$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ (car H et F sont des primitives de f et donc elles doivent être dérivables et continues sinon H' et F' ne seraient pas égales à f).

Pour le troisième point, on a :

$$(H - F)' = H' - F' \overset{\text{énoncé}}{=} f - f = 0$$

Donc le troisième point est satisfait. Le théorème de la fonction constante dit alors que $H - F$ est une fonction constante $\forall x \in [a; b]$:

$$(H - F)(x) = C \rightarrow H(x) - F(x) = C$$

Les deux primitives (H et F) diffièrent d'une constante.

$\diamondsuit$