Théorème de la moyenne

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Soit $f : [a;b] \to \Re$ une fonction continue. Il existe un élément c de $[a;b]$ dont l'image par f est égale à la valeur moyenne de f sur $[a;b]$. Autrement dit, il existe $c \in [a;b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Une interprétation géométrique possible est que l'aire sous la courbe f est égale à l'aire d'un rectangle de base $b-a$ et de hauteur f_{moy}. Ici f_{moy} est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$. Dans la Figure 1, on voit que les deux aires sont égales.

Démonstration

Premièrement, comme f est continue, alors l'intégrale de la formule ci-dessus existe. Selon le théorème de Weierstrass (on peut l'appliquer ici car f est continue), on sait qu'il existe x_{min} et $x_{max} \in [a;b]$ tels que :

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

pour tous $x \in [a;b]$. On peut donc écrire que :

$$\int_a^b f(x_{min})\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x_{max})\,dx$$

L'explication de cette étape est dans la Figure 2.

Le membre gauche et le membre droit de l'égalité ci-dessus sont des intégrales de constante (x_{min} et x_{min} sont des nombres et non pas des variables !).

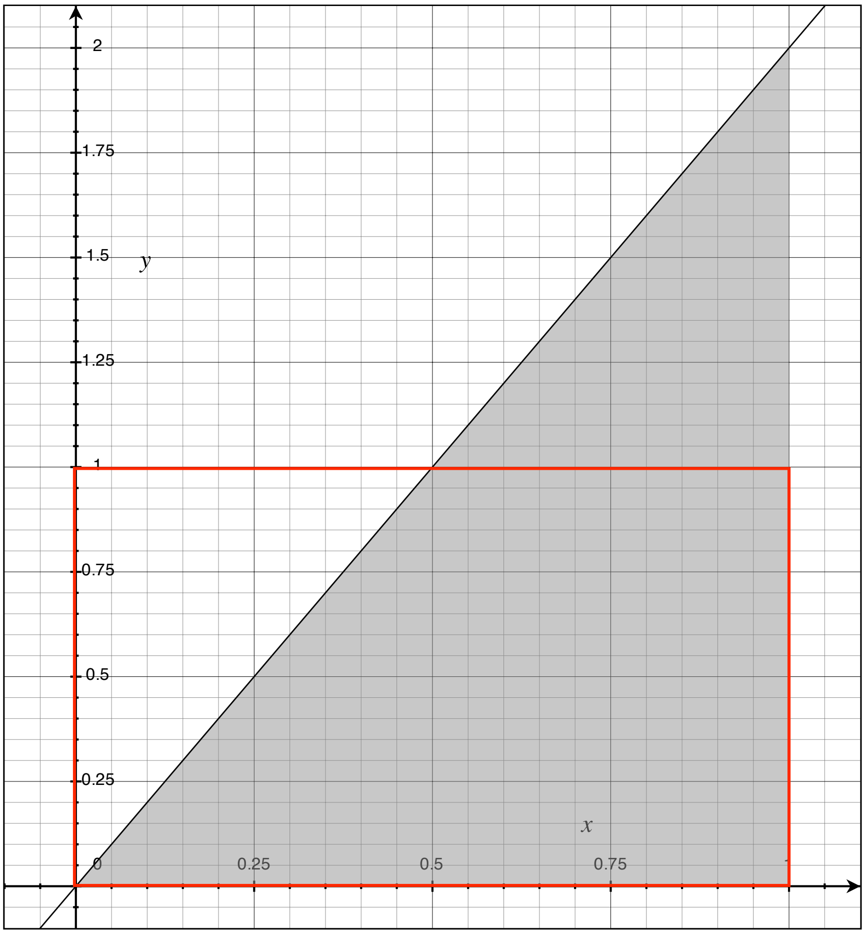

FIGURE 1 – L'aire en gris vaut $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. L'aire du rectangle rouge vaut $1 \cdot 1 = 1$. Les deux aires sont égales. Le rectangle "prend trop d'aire" à gauche, mais c'est compensé par l'aire qu'il "oublie" en haut.

L'intégrale d'une constante est égale à la longueur de l'intervalle $(b-a)$ multipliée par la valeur de la constante ($f(x_{min})$ ou $f(x_{max})$) :

$$f(x_{min}) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_{max}) \cdot (b-a)$$

Ensuite on divise partout par $b-a$:

$$f(x_{min}) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq f(x_{max})$$

qui peut encore s'écrire comme :

$$f(x_{min}) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_{max})$$

Comme la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est comprise entre la valeur maximale de la fonction ($f(x_{max})$) et la valeur minimale ($f(x_{min})$), alors le théorème de Weierstrass nous dit qu'il existe bien un $c \in [a;b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$\diamondsuit$

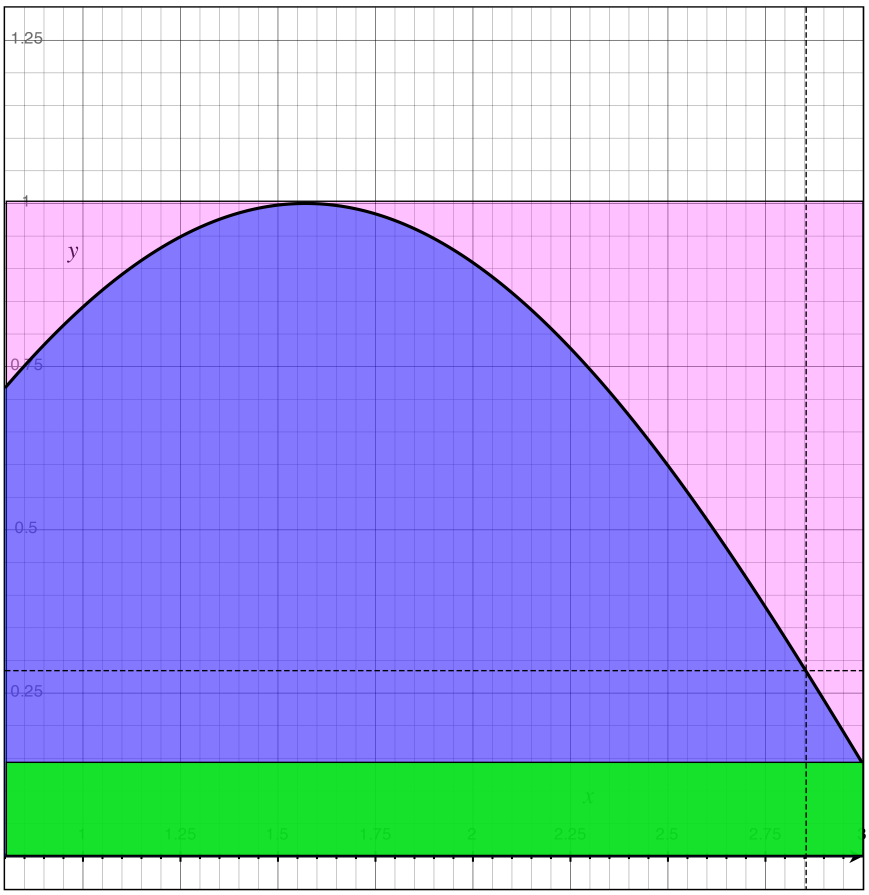

FIGURE 2 – La surface rose représente $\int_a^b f(x_{max})\,dx$ et la surface verte représente $\int_a^b f(x_{min})\,dx$. On voit clairement que l'aire sous la courbe (violette) est comprise entre ces 2 surfaces.