Théorème des accroissements finis (Lagrange)
Corollaire 1 : Théorème de la fonction constante

Gregory Loichot

18 juin 2013

Enoncé

Soit une fonction $f : \Re \to \Re$. Si

1. f est continue sur $[a; b]$,
2. f est dérivable sur $]a; b[$,
3. $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a; b[$.

Alors, f est une fonction constante.

La réciproque est évidente : si f est constante, alors elle est continue et dérivable et $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a; b[$.

Démonstration

Soient deux nombres quelconques $x, y \in [a; b]$. Supposons que $x < y$; donc $x \neq y$ (cette affirmation est vitale pour la suite, tout repose sur cette affirmation).

L'idée est de montrer que, étant donnés deux nombres *différents*, leurs images sont *identiques* et donc que la fonction est constante !

f satisfait les conditions du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x; y]$ (elle le satisfait sur $[a; b]$ et, comme $[x; y]$ est un sous-intervalle de $[a; b]$, elle le satisfait aussi sur $[x; y]$). Ainsi le théorème des accroissement dit qu'il y existe un nombre c tel que :

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or selon le point 3 de l'énoncé de ce corollaire, on sait que $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a; b[$. Cela est aussi valable sur le sous-intervalle $[x; y]$: $f'(x) = 0$, $\forall x \in]x; y[$.

Attention ! Ici il faut bien faire la différence entre le x variable et le x constante. Dans la dernière équation ci-dessus, il faut comprendre : $f'(t) = 0$, $\forall t \in]x; y[$.

On a donc :

$$f'(c) = 0 = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Cependant, nous avions dit que $x < y$ et donc que x est *différent* de y, ce qui veut dire que le dénominateur de la fraction ne peut pas être nul. Pour satisfaire l'égalité, il faut que $f(y) - f(x)$ soit nul, donc que :

$$f(y) - f(x) = 0 \to f(y) = f(x)$$

Donc la fonction est constante !